УДК 519.6 Вестник СПбГУ. Прикладная математика... 2018. Т. 14. Вып. 1

В. М. Буре, А. Н. Елфимов, В. В. Карелин

СТАЦИОНАРНЫЕ ЦИКЛЫ В ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ*

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В статье описывается детерминированная система обслуживания, в которую поступают требования из трех очередей. Характеристики системы обслуживания, такие как интенсивность и скорость обслуживания, являются стабильными и не зависят от времени. Представлены определения стационарного режима и цикла обслуживания для требований из трех очередей. Основная цель статьи — найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых гарантируется существование стационарного режима работы сервисной системы. При реализации стационарного режима обслуживания исключается возможность бесконечного накопления запросов, при этом порядок обслуживания очередей устанавливается заранее и не изменяется в будущем. В рамках математической модели детерминированной системы обслуживания вводятся некоторые технологические ограничения. Их выполнение необходимо для построения адекватной модели. В частности, предполагается, что обслуживание требования не может быть прервано. Имеется также ограничение на продолжительность цикла обслуживания. Доказательство основного результата основываются на решении неравенств, полученных при рассмотрении математической модели функционирования системы обслуживания. В доказательстве дается геометрическая интерпретация множества допустимых (обеспечивающих стационарный режим) продолжительностей непрерывного обслуживания для требований, полученных из очередей. Библиогр. 12 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: детерминированная система обслуживания, цикл обслуживания, стационарный режим.

V. M. Bure, A. N. Elfimov, V. V. Karelin

STATIONARY CYCLES IN A DETERMINISTIC SERVICE SYSTEM

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,
199034, Russian Federation

The article describes a deterministic service system, which receives requests from three queues. Characteristics of the service system such as intensity and rate of service request are stable and do not depend on time. The paper introduces definitions of the stationary mode and the cycle of service for requirements from queues. The main aim this article is to find necessary and sufficient conditions imposed on the duration of the service cycles, under which the existence of a stationary mode of operation of the service system is obtained and guaranteed. When a stationary service mode is implemented, the possibility of infinite accumulation of requests is excluded, while the order of servicing queues is set in advance and does not change in the

Буре Владимир Мансурович — доктор технических наук, профессор; vlb310154@gmail.com
Елфимов Антон Николаевич — аспирант; elfpro@list.ru
Карелин Владимир Витальевич — кандидат физико-математических наук, доцент; vlkarelin@mail.ru

Bure Vladimir Mansurovich — doctor of technical sciences, professor; vlb310154@gmail.com
Elfimov Anton Nikolaevich — postgraduate student; elfpro@list.ru
Karelin Vladimir Vitalievich — PhD of physical and mathematical sciences, associate professor; vlkarelin@mail.ru

* Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (грант № 9.38.205.2014).

 https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2018.105

future. Within the framework of the mathematical model of the deterministic service system, some technological limitations have been introduced. The fulfillment of these limitations is necessary for the construction of an adequate model. In particular, it is assumed that the service of the requirement can't be interrupted. The proof of the main result of the item is based on the solution of inequalities obtained by considering the mathematical model of the functioning of the service system. In the proof was given a geometric interpretation of the set of admissible (providing a stationary mode) durations of continuous service for requests received from the queues. Refs 12. Figs 2.

Keywords: deterministic system service, service cycle, steady state.

Введение. Системы обслуживания широко применяются в повседневной жизни: управление очередями в банках, телефоны горячей линии, управление движением на перекрестках. Каждая система обслуживания состоит из обслуживающего устройства или устройств, если их несколько, например светофор или регулировщик, управляющий транспортными потоками на перекрестках. Задача любой системы обслуживания — произвести обслуживание (удовлетворить требования) поступающих заявок, причем они могут подаваться на вход как в случайные, так и в определенные моменты времени. В качестве требований могут выступать клиенты, ожидающие обслуживания в банке, участники дорожного движения, ожидающие разрешающего сигнала светофора или регулировщика. Обслуживание одного требования занимает, вообще говоря, какое-то время t, по истечению которого устройство готово приступить к обслуживанию следующего требования того же типа или переключиться на заявки другого типа. На примере перекрестка к требованиям первого типа можно отнести пешеходов, а к требованиям второго типа — водителей транспортных средств. На практике часто встречаются системы массового обслуживания, основные характеристики (интенсивность поступления и обслуживания заявок) которых достаточно стабильны. Такие системы, с некоторым приближением, можно считать детерминированными.

В работе рассматривается математическая модель детерминированной системы обслуживания с ограничением на длину цикла и тремя потоками требований.

Обзор литературы. В работе [1] приводятся основные понятия теории массового обслуживания. Вводятся основные понятия теории очередей. В [2] описываются задачи управления транспортными потоками, в частности задача управления светофором для увеличения пропускной способности перекрестка.

В статьях [3, 4] рассматривается близкая по постановке задача управления светофором на изолированном перекрестке для детерминированных потоков. Критерием оптимальности служит линейная функция, зависящая от длин очередей, ожидающих переключения сигнала светофора с запрещающего (красного) на разрешающий (зеленый) сигнал. Для этого случая строится аналитическое решение оптимального переключения сигналов светофора. Выводятся условия, при выполнении которых перекресток будет работать в стационарном режиме. В [4] решается задача оптимального выбора режима работы светофора на перекрестке, когда присутствует ограничение на длину цикла. Также авторы [4] приводят численный пример, иллюстрирующий работу светофора на перекрестке.

В работах [5–9] описываются детерминированные системы обслуживания с одним обслуживающим устройством и двумя [5] или тремя потоками требований [6–8]. Вводятся определения стационарного режима функционирования системы и цикла, представляющего собой пару (для случая двух очередей) или тройку (для системы с тремя потоками требований). Определяются необходимые и достаточные условия, накладываемые на систему для установления стационарного режима работы обслуживающего устройства. Кроме того, рассматривается задача оптимального выбора длительностей обслуживания системы, при которых длина очереди будет минимальной. В работе [9] поднимается вопрос о существовании стационарного режима для систем с двумя и тремя потоками требований при наличии ограничений на длину цикла.

В статье [10] решалась задача управления детерминированной системой обслуживания с двумя потоками требований, математическая модель которой описывается системой дифференциальных уравнений. Устанавливались необходимые условия оптимальности кусочно-постоянных управлений, доставляющих минимум интегральному функционалу, который представляет собой сумму длин очередей, ожидающих обслуживания устройством в момент времени T (см. также [11, 12]).

В данной статье исследуется проблематика стационарных режимов обслуживания при наличии ограничений на длину цикла.

Одно обслуживающее устройство и три очереди. ***Постановка задачи.*** Будем рассматривать детерминированную систему обслуживания с одним обслуживающим устройством и тремя потоками требований.

В работах [6, 7] были введены обозначения и сформулировано определение. Обозначим $q_i(t)$ длину очереди заявок, ожидающих обслуживания устройством для потока i во время t соответственно, $i = 1, 2, 3$.

Пусть $a_i(t)$ и $d_i(t)$ — скорости поступления и выполнения заявок для i-й очереди соответственно, $i = 1, 2, 3$.

Определение 1. *Тройка (g_1, g_2, g_3) будет называться циклом, где g_i — длительность непрерывного обслуживания заявок из очереди с номером i $(i = 1, 2, 3)$.*

Следуя работам [6, 7], примем такие допущения:

1. Будем считать, что $a_i(t) = a_i \geqslant 0$ — известная постоянная величина.
2. Предположим, что $q_i(t)$ — неотрицательное целое число (число заявок в очереди на обслуживание потока i в момент времени t).
3. Пусть

$$d_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если устройство обслуживает заявку из очереди } j \neq i; \\ d_i, & \text{если устройство обслуживает заявку из очереди } i. \end{cases}$$

4. Скорость обслуживания заявок выше скорости поступления, т. е. $d_i > a_i$.
5. В начальный момент времени очередь отсутствует, т. е. $q_i(0) = 0$.
6. Длительности непрерывного обслуживания заявок постоянны для каждой из очередей, но могут отличаться в разных очередях.

Будем также предполагать следующее:

7. Время — дискретная величина, пропорциональная условной единице времени l, длина которой — это минимальный интервал времени, в течение его в каждом из потоков происходит или может происходить только целое число событий, другими словами, $g_i = k_i l$, где $k_i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.
8. Возможно наличие ограничения на продолжительность цикла обслуживания: $g_1 + g_2 + g_3 \leqslant L$, где L — некоторая заданная константа.

Введем последовательности времени переключения системы с обслуживания одного потока требований на обслуживание требований другого потока, а также определения стационарного режима и цикла, которые будут использоваться далее.

Рассмотрим последовательности моментов времени. Первая последовательность составляет

$$\tau_1^{(1)} = g_1,\ \ \tau_2^{(1)} = g_1 + g_2 + g_3 + g_1,\ \ \ldots,\ \ \tau_{k+1}^{(1)} = (g_1 + g_2 + g_3)k + g_1,\ \ \ldots$$

Она представляет собой моменты начала обслуживания заявок (требований) из второй очереди, или, что то же самое, моменты прекращения обслуживания требований первого потока.

Вторая последовательность моментов времени равна

$$\tau_1^{(2)} = g_1 + g_2,\ \ \tau_2^{(2)} = g_1 + g_2 + g_3 + g_1 + g_2,\ \ \ldots,\ \ \tau_{k+1}^{(2)} = (g_1 + g_2 + g_3)k + g_1 + g_2,\ \ \ldots$$

Она представляет собой моменты начала обслуживания заявок из очереди с номером три, другими словами, моменты времени, когда происходит прекращение выполнения требований второго потока.

Третья последовательность моментов времени имеет вид

$$\tau_1^{(3)} = g_1+g_2+g_3,\ \ \tau_2^{(3)} = g_1+g_2+g_3+g_1+g_2+g_3,\ \ \ldots,\ \ \tau_{k+1}^{(3)} = (g_1+g_2+g_3)(k+1),\ \ \ldots$$

Она определяет моменты начала обслуживания заявок из первой очереди, или, другими словами, моменты, когда прекращается обслуживание требований третьего потока.

В работе [6] было введено следующее определение.

Определение 2. *Под стационарным режимом будем подразумевать такой режим обслуживания заявок, при котором не будет происходить накапливания очереди, т. е. будут выполнены такие условия*:

$$q_1\left(\tau_{k+1}^{(1)}\right) = 0,\quad q_2\left(\tau_{k+1}^{(2)}\right) = 0,\quad q_3\left(\tau_{k+1}^{(3)}\right) = 0,\quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

Необходимое и достаточное условия стационарности. Основной результат из работы [8] при наличии ограничения на длину цикла можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Пусть* $q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0$*,* $g_1 + g_2 + g_3 \leqslant L$*. Цикл* (g_1, g_2, g_3) *порождает стационарный режим тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\begin{cases} g_1 + g_2 + g_3 \leqslant L, \\ \dfrac{d_1 - a_1}{a_1} \geqslant \dfrac{g_2 + g_3}{g_1}, \\ \dfrac{d_2 - a_2}{a_2} \geqslant \dfrac{g_1 + g_3}{g_2}, \\ \dfrac{d_3 - a_3}{a_3} \geqslant \dfrac{g_1 + g_2}{g_3}. \end{cases} \tag{1}$$

Следствие 1. *Пусть* $q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0$*. Необходимым условием установления стационарного режима в цикле* (g_1, g_2, g_3) *является выполнение неравенства*

$$\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \frac{a_3}{d_3} \leqslant 1.$$

Получены необходимые и достаточные условия существования стационарного режима в более удобном виде.

Теорема 2. *Пусть* $q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0$*,* $g_1 + g_2 + g_3 \leqslant L$*. Цикл* (g_1, g_2, g_3)*, порождающий стационарный режим, существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

$$\frac{d_1}{a_1} > \frac{d_2}{d_2 - a_2}, \qquad \min\left\{\frac{L}{g_3}, \frac{d_3}{a_3}\right\} \geqslant \frac{d_1 d_2}{d_1 d_2 - d_1 a_2 - d_2 a_1}. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем необходимые и достаточные условия установления стационарного режима теоремы 1:

$$\begin{cases} g_1 + g_2 + g_3 \leqslant L, \\ \dfrac{\frac{g_1+g_2}{g_3} + 1}{\frac{g_1}{g_3}} \leqslant \dfrac{d_1}{a_1}, \\ \dfrac{\frac{g_1+g_2}{g_3} + 1}{\frac{g_2}{g_3}} \leqslant \dfrac{d_2}{a_2}, \\ \dfrac{g_1 + g_2}{g_3} + 1 \leqslant \dfrac{d_3}{a_3}. \end{cases}$$

Далее сделаем замену переменных:

$$\frac{g_1}{g_3} = u_1, \quad \frac{g_2}{g_3} = u_2. \tag{3}$$

Обратим внимание, что новые параметры в (3) $u_1 > 0$ и $u_2 > 0$, так как $g_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Тогда необходимые и достаточные условия в новой параметризации задаются следующими неравенствами:

$$\begin{cases} u_2 \leqslant \dfrac{d_1 - a_1}{a_1} u_1 - 1, \\ u_2 \geqslant \dfrac{a_2}{d_2 - a_2} + \dfrac{a_2}{d_2 - a_2} u_1, \\ u_2 \leqslant \dfrac{d_3 - a_3}{a_3} - u_1, \\ u_2 \leqslant \dfrac{L - g_3}{g_3} - u_1. \end{cases} \tag{4}$$

Систему неравенств (4) можно решить графически. Для этого в прямоугольной системе координат (u_1, u_2) построим графики функций

$$u_2 = \frac{d_1 - a_1}{a_1} u_1 - 1, \tag{5}$$

$$u_2 = \frac{a_2}{d_2 - a_2} + \frac{a_2}{d_2 - a_2} u_1, \tag{6}$$

$$u_2 = \frac{d_3 - a_3}{a_3} - u_1, \tag{7}$$

$$u_2 = \frac{L - g_3}{g_3} - u_1. \tag{8}$$

Нас интересует только первая четверть, так как параметры u_1 и u_2 являются положительными величинами, т. е. $u_1 > 0$, $u_2 > 0$.

Рассмотрим случай, когда $\frac{L}{g_3} < \frac{d_3}{a_3}$ (рис. 1). Найдем решение системы неравенств (4). Но так как данная система неравенств не всегда имеет решение, не всегда можно гарантировать установление стационарного режима.

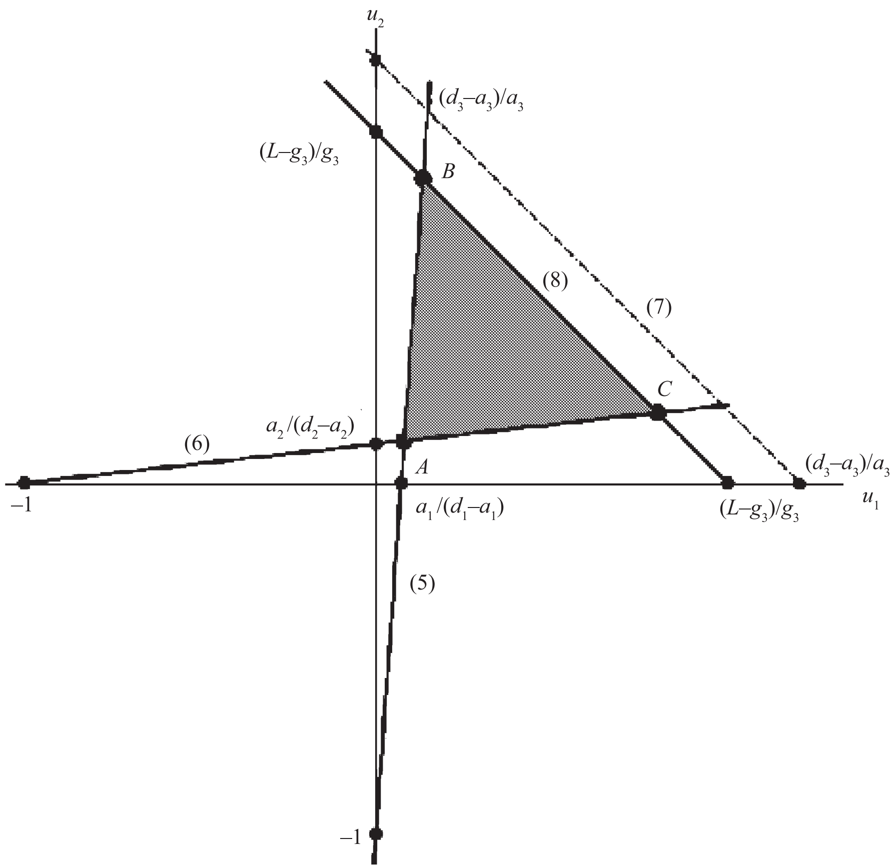

Рис. 1. Решение системы неравенств (4) для случая $\frac{L}{g_3} < \frac{d_3}{a_3}$

Выведем необходимые и достаточные условия, при которых система неравенств (4) для случая $\frac{L}{g_3} < \frac{d_3}{a_3}$ имеет решения.

1. Угловой коэффициент (5) должен быть больше углового коэффициента (6) ($\frac{d_1-a_1}{a_1} > \frac{a_2}{d_2-a_2}$). Если данное неравенство будет выполнено как равенство, график функции (5) будет параллелен графику функции (6), а в случае, когда угловой коэффициент (5) будет меньше углового коэффициента (6), данные графики не будут пересекаться в первой четверти. То есть если не выполнится условие

$$\frac{d_1 - a_1}{a_1} > \frac{a_2}{d_2 - a_2},$$

то система (4) не будет иметь решения.

2. Точка пересечения графика функции (6) с осью u_2 должна лежать не выше точки пересечения оси u_2 графиком (8). В противном случае система неравенств (4) не будет иметь решения в первой четверти. То есть если не будет выполнено условие

$$\frac{a_2}{d_2 - a_2} < \frac{L - g_3}{g_3},$$

то решение системы (4) не будет лежать в первой четверти.

3. Точка пересечения графика функции (8) с осью u_1 должна лежать правее точки пересечения оси u_1 графиком (5). Если данное условие не будет выполнено, множество решений системы (4) не будет удовлетворять условию неотрицательности параметров u_1, u_2. То есть должно быть выполнено условие

$$\frac{a_1}{d_1 - a_1} < \frac{L - g_3}{g_3}.$$

4. Точка пересечения графиков (5) и (6) (точка A на рис. 1) должна лежать не выше прямой (8). Найдем координату u_1 для точки A. Для этого приравняем координату u_2 (5) и (6) и найдем, что

$$\frac{d_1 - a_1}{a_1} u_1 - 1 = \frac{a_2}{d_2 - a_2} u_1 + \frac{a_2}{d_2 - a_2}.$$

Тогда после преобразований условие примет вид

$$\frac{d_1 d_2}{d_1 d_2 - d_2 a_1 - d_1 a_2} \leqslant \frac{L}{g_3}.$$

Объединив условия (1)–(4), получим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{L}{g_3} < \dfrac{d_3}{a_3}, \\ \dfrac{d_1}{a_1} > \dfrac{d_2}{d_2 - a_2}, \\ \dfrac{L}{g_3} > \dfrac{d_2}{d_2 - a_2}, \\ \dfrac{L}{g_3} > \dfrac{d_1}{d_1 - a_1}, \\ \dfrac{L}{g_3} \geqslant \dfrac{d_1 d_2}{d_1 d_2 - d_1 a_2 - d_2 a_1}. \end{cases} \tag{9}$$

Обратим внимание, что

$$\frac{d_2}{d_2 - a_2} \frac{d_1}{d_1 - a_1} = \frac{d_1 d_2}{d_1 d_2 - d_2 a_1 - d_1 a_2 + a_1 a_2} < \frac{d_1 d_2}{d_1 d_2 - d_2 a_1 - d_1 a_2},$$

таким образом, условие

$$\frac{L}{g_3} \geqslant \frac{d_1 d_2}{d_1 d_2 - d_1 a_2 - d_2 a_1}$$

сильнее, чем

$$\frac{L}{g_3} > \frac{d_2}{d_2 - a_2}, \qquad \frac{L}{g_3} > \frac{d_1}{d_1 - a_1}.$$

Поэтому полученные неравенства (9) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{L}{g_3} < \dfrac{d_3}{a_3}, \\ \dfrac{d_1}{a_1} > \dfrac{d_2}{d_2 - a_2}, \\ \dfrac{L}{g_3} \geqslant \dfrac{d_1 d_2}{d_1 d_2 - d_1 a_2 - d_2 a_1}. \end{cases} \tag{10}$$

Теперь перейдем к случаю, когда $\frac{L}{g_3} \geqslant \frac{d_3}{a_3}$. Решение системы (4) представим на рис. 2.

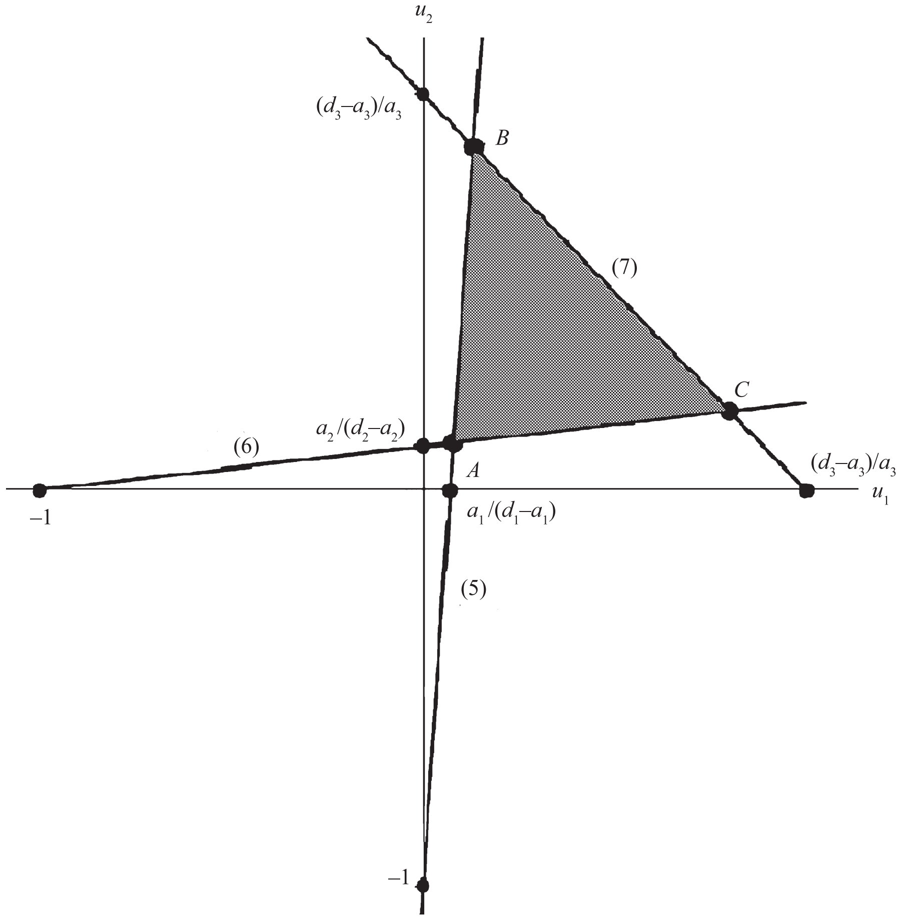

Рис. 2. Решение системы неравенств 4, если $\frac{L}{g_3} \geqslant \frac{d_3}{a_3}$

Выведем необходимые и достаточные условия, при которых система неравенств (4) имеет решение.

Доказательство случая $\frac{L}{g_3} \geqslant \frac{d_3}{a_3}$ совпадает с доказательством для $\frac{L}{g_3} < \frac{d_3}{a_3}$. Поэтому приведем основные результаты. Для удобства рассмотрения выпишем еще раз систему неравенств (4), для которой ищем решение:

$$\begin{cases} u_2 \leqslant \dfrac{d_1 - a_1}{a_1} u_1 - 1, \\ u_2 \geqslant \dfrac{a_2}{d_2 - a_2} + \dfrac{a_2}{d_2 - a_2} u_1, \\ u_2 \leqslant \dfrac{d_3 - a_3}{a_3} - u_1, \\ u_2 \leqslant \dfrac{L - g_3}{g_3} - u_1. \end{cases}$$

Эта система неравенств имеет решение, когда выполнены неравенства

$$
\begin{cases}
\dfrac{L}{g_3} \geqslant \dfrac{d_3}{a_3}, \\
\dfrac{d_1}{a_1} > \dfrac{d_2}{d_2 - a_2}, \\
\dfrac{d_3 - a_3}{a_3} > \dfrac{d_2}{d_2 - a_2}, \\
\dfrac{d_3 - a_3}{a_3} > \dfrac{d_1}{d_1 - a_1}, \\
\dfrac{d_3}{a_3} \geqslant \dfrac{d_1 d_2}{d_1 d_2 - d_1 a_2 - d_2 a_1}.
\end{cases}
$$

Вспомнив, что

$$
\frac{d_2}{d_2 - a_2}\frac{d_1}{d_1 - a_1} = \frac{d_1 d_2}{d_1 d_2 - d_2 a_1 - d_1 a_2 + a_1 a_2} < \frac{d_1 d_2}{d_1 d_2 - d_2 a_1 - d_1 a_2},
$$

получаем условия в следующем виде:

$$
\begin{cases}
\dfrac{L}{g_3} \geqslant \dfrac{d_3}{a_3}, \\
\dfrac{d_1}{a_1} > \dfrac{d_2}{d_2 - a_2}, \\
\dfrac{d_3}{a_3} \geqslant \dfrac{d_1 d_2}{d_1 d_2 - d_1 a_2 - d_2 a_1}.
\end{cases} \tag{11}
$$

Объединив условия (10) и (11), снова имеем неравенства (2). Обратим внимание, что они были определены при помощи тождественных преобразований из необходимых и достаточных условий (1). Поэтому выполнение условий (2) также гарантирует нам выполнение условий (1). А это означает, что цикл (g_1, g_2, g_3), порождающий стационарный режим, существует тогда и только тогда, когда выполнены условия (2).

Теорема 2 доказана.

Замечание. Когда выполнено условие $\frac{L}{g_3} \geqslant \frac{d_3}{a_3}$, тогда необходимые и достаточные условия совпадают с полученными для системы без ограничения на длину цикла [7].

Следствие 2. *Пусть* $q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0$. *Цикл* [6], *порождающий стационарный режим, существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d_1}{a_1} > \dfrac{d_2}{d_2 - a_2}, \\
\dfrac{d_3}{a_3} \geqslant \dfrac{d_1 d_2}{d_1 d_2 - d_1 a_2 - d_2 a_1}.
\end{cases}
$$

Заключение. В работе была рассмотрена детерминированная система обслуживания с одним обслуживающим устройством и тремя очередями с ограничением на длину цикла. Для такой системы были выведены необходимые и достаточные условия установления стационарного режима работы системы, которые были сформулированы в виде теорем 1 и 2. Теорема 1 ранее была получена для систем без ограничения на длину цикла; теорема 2 является новым результатом, она имеет бо́льшую практическую ценность по сравнению с теоремой 1, так как условия этой теоремы более удобны для проверки существования в данной системе стационарных режимов.

Также обратим внимание на то, что теорему 2 можно использовать и для случая, когда ограничение на длину цикла не накладывается, для чего нужно положить L равным бесконечности.

Литература

1. *Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа, 1982. 256 с.

2. *Gazis D.* Traffic theory. Kluwer, MA.: Kluwer Academic Publ., 2002. 259 p.

3. *Haddad J., De Schutter B., Mahalel V.* et al. Optimal steady-state control for isolated traffic intersections // IEEE Transactions on Automatic Control. 2010. Vol. 55 (11). P. 2612–2617.

4. *Haddad J., Mahalel D., Ioslovich I., Gutman P.-O.* Constrained optimal steady-state control for isolated traffic intersections // Control Theory Tech. 2014. Vol. 12 (1). P. 84–94.

5. *Елфимов А. Н.* О задаче управления системой массового обслуживания с двумя очередями // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2, № 1. С. 605–611.

6. *Буре В. М., Карелин В. В., Елфимов А. Н.* Об одной задаче управления детерминированной системой обслуживания // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 4. С. 100–112.

7. *Karelin V. V., Bure V. M., Polyakova L. N., Elfimov A. N.* Control problem of a deterministic queuing system // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10, N 21–24. P. 1023–1030.

8. *Karelin V., Bure V., Elfimov A.* Deterministic queuing system // Proceedings VIII Moscow Intern. Conference on Operations Research. 2016. Vol. 1. P. 93–96.

9. *Елфимов А. Н., Буре В. М.* О существовании стационарных циклов в детерминированной системе обслуживания при ограничении на длину цикла // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3, № 1. С. 633–637.

10. *Полякова Л. Н., Карелин В. В., Буре В. М., Хитров Г. М.* Точные штрафные функции в задаче управления одной системой массового обслуживания // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. Вып. 1. С. 73–81.

11. *Yakushev V. P., Karelin V. V., Bure V. M., Parilina E. M.* Soil acidity adaptive control problem // Stochastic Enviromental Research and Risk Assessment. 2015. Vol. 29, N 6. P. 1671–1677.

12. *Черников С. Н.* Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.

Для цитирования: *Буре В. М., Елфимов А. Н., Карелин В. В.* Стационарные циклы в детерминированной системе обслуживания // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14. Вып. 1. С. 40–50. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2018.105

References

1. Ivchenko G. I., Kashtanov V. A., Kovalenko I. N. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [*Queuing theory*]. Moskow, Vishaya shkola Publ., 1982, 256 p. (In Russian)

2. Gazis D. *Traffic theory*. Kluwer, MA, Kluwer Academic Publ., 2002, 259 p.

3. Haddad J., De Schutter B., Mahalel V. et al. Optimal steady-state control for isolated traffic intersections. *IEEE Transactions on Automatic Control.*, 2010, vol. 55 (11), pp. 2612–2617.

4. Haddad J., Mahalel D., Ioslovich I., Gutman P.-O. Constrained optimal steady-state control for isolated traffic intersections. *Control Theory Tech.*, 2014, vol. 12 (1), pp. 84–94.

5. Elfimov A. N. O zadache upravleniya sistemoy massovogo obsluzhivaniya s dvumya ocheredyami [Control problem of service system with two queuing]. *Control Processes and Stability*, 2015, iss. 2, no. 1, pp. 605–611. (In Russian)

6. Bure V. M., Karelin V. V., Elfimov A. N. O odnoy zadache upravleniya determinirovannoy sistemoy upravleniya [On one control problem of a deterministic service system]. *Vestnik of Saint Peterburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes,* 2015, iss. 4, pp. 100–112. (In Russian)

7. Karelin V. V., Bure V. M., Polyakova L. N., Elfimov A. N. Control problem of a deterministic queueing system. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, vol. 10 (21), pp. 1023–1030.

8. Karelin V., Bure V., Elfimov A. Deterministic queuing system. *Proceedings VIII Moscow International Conference on Operations Research*, 2016, vol. 1, pp. 93–96.

9. Elfimov A. N., Bure V. M. O sychestvovanii stacionarnyh ciclov v determinirovannoy sisteme obsluzhivaniya pri ogranichenii na dliny cicla [On the existence of stationary cycles in a deterministic service system with a constraint on the length of a cycle]. *Control Processes and Stability*, 2016, vol. 3, no. 1, pp. 633–637. (In Russian)

10. Polyakova L. N., Karelin V. V., Bure V. M., Chitrov G. M. Tochnye shtrafnye funkcii v zadache upravleniya odnoy sistemoy massovogo obsluzhivaniya [Exact penalty functions in the control problem of one queuing system]. *Vestnik of Saint Peterburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2015, iss. 1, pp. 73–81. (In Russian)

11. Yakushev V. P., Karelin V. V., Bure V. M., Parilina E. M. Soil acidity adaptive control problem. *Stochastic Enviromental Research and Risk Assessment*, 2015, vol. 29, no. 6, pp. 1671–1677.

12. Chernikov S. N. *Lineynye neravenstva* [*Linear inequalities*]. Moskow, Nauka Publ., 1968, 488 p. (In Russian)

For citation: Bure V. M., Elfimov A. N., Karelin V. V. Stationary cycles in a deterministic service system. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2018, vol. 14, iss. 1, pp. 40–50. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2018.105

Статья поступила в редакцию 15 октября 2017 г.

Статья принята к печати 11 января 2018 г.